《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言, 书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍, 从中汲取营养, 获得教益.

20 世纪 70 年代后期, 我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年, 而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后, 我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此, 科学出版社陆续推出了多套数学丛书, 其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出, 前者出版约 40 卷, 后者则逾 80 卷. 它们质量甚高, 影响颇大, 对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者, 针对一些重要的数学领域与研究方向, 作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识, 又反映其新发展, 力求深入浅出, 简明扼要, 注重创新.

近年来, 数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用, 还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持, 编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展, 使它越办越好, 为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

本书的第二版与第一版相比较,除改正了第一版中的若干笔误和印刷错误之外,主要增添了第9章,即模态逻辑、知识推理与描述逻辑的内容. 之所以增添这一章是基于以下考虑:模态逻辑、知识推理与描述逻辑都是具有较广泛的应用背景并且是为人工智能学科所关注的课题,国内虽有介绍这些课题的文章和书籍,但就作者所见到的文献而言,其侧重点似乎不在于严格论证,或者预备知识不足而不便于初学者学习,所以在这方面如果有一部能较为系统的、属于入门而又注重严格逻辑论证的教材自然会使读者受益不少. 近几年作者曾应邀先后在四川大学、西南大学、北京大学、湖南大学和上海师范大学等一些地方讲述过这部分内容,效果似乎尚好,所以就萌发了撰写这部分内容的想法. 这部分内容显然与逻辑紧密相关,但又不属于经典数理逻辑中四论(公理集合论、模型论、证明论、递归论)的范围,自然也就可以纳入于非经典数理逻辑的范围之中了. 作者写完了第9章的内容之后,曾由研究生高荣荣、王茹、段巧林和郭秀敏在讨论班中按顺序报告过,这几位同学以及参加讨论的研究生和访问学者提出了不少好的建议,相应的内容也随即作了修改,特别是博士生李璧镜提出了若干重要的修改意见,她还认真地打印了第9章的原稿和修改稿以及编写和打印了全书的新索引, 博士生周红军和折延宏认真地校阅了全部书稿,并纠正了第9章中的几处不严密的论述. 在本书第二版出版之际,我对他们的辛勤工作表示感谢.

本书第9章的撰写时间较仓促,内容虽经过几次修改,但由于作者的水平所限,可能还有许多我们未能发现的错误,作者衷心希望各位专家及读者批评指正.

王国俊
2007 年于陕西师范大学数学研究所
E-mail :gjwang@ snnu. edu. cn

第一版前言

> 关于数学的适当逻辑基础的问题，……，过分追求严密性，将引入绝境而失去它的真正意义. 数学仍然是活跃而富有生命力的，但是它只能建立在实用的基础上.
>
> 〔美〕Morris Kline

我们首先就本书的书名《非经典数理逻辑与近似推理》的来历以及撰写本书的目的作一说明，以便读者决定本书是否适合他们学习或参考. 这得从本书的论题与数理逻辑学科的关系谈起.

数理逻辑已经有 300 多年的历史. 如果从 1880 年前不久正式提出谓词演算和集合论时算起，也已有 100 多年的历史了（见文献[47,49]）. 如今数理逻辑已经发展成为一门枝繁叶茂的学科. 按文献[50]的划分，数理逻辑包括模型论、公理集合论、递归论和证明论四个部分，而按照文献[47]的划分，则数理逻辑可分为五个部分，即在以上四个部分之外再单独把逻辑演算提出来作为一个部分. 从应用的广泛与普及性的角度来看，我们认为后面这种划分是更为恰当的. 事实上，数理逻辑是一门相当艰深的学科，以至于许多数学家与数理逻辑学家缺乏足够的沟通. 或许 De Morgan 的话在一定程度上反映了这种情况，他说："我们知道，数学家对于逻辑不如逻辑学家对于数学那样关心"（见文献[46]）. 而逻辑演算正是数理逻辑学科中受到广大非数理逻辑专家最为关心的部分. 为了填补数学家与逻辑学家之间的沟壑，Hamilton 专门写了《数学家的逻辑学》（见文献[45]），在总共七章中前四章就讲的是逻辑演算. 如果我们把模型论、公理集合论、递归论和证明论称作经典数理逻辑的话，那么本书的"非经典数理逻辑"自然就不属于以上各范畴了. 这里我们并未将逻辑演算排除在外，因为逻辑演算是本书的重要组成部分. 不过本书的逻辑演算又与经典的逻辑演算有很大不同.

经典的逻辑演算主要包括命题演算与谓词演算（也称一阶逻辑）两个部分. 从一定意义上讲，这两个部分的内容在于从形式上分析命题之间的关系以及命题自身的结构从而达到判定命题真伪的目的. 然而并非每个命题都可用"真"与"假"这两种情况来判定. 一个著名的例子是 Lukasiewicz 的下述命题：

命题 1　明年 12 月 21 日中午我将在华沙.

对这个未来的事件我们既不能断定其为真，也不能断定其为假. Lukasiewicz 引入了不同于"真"和"假"的第三个值来表示其真实程度，并提出了三值逻辑的理

论. 让我们更加展开一些,考虑下面的两个命题.

命题 2　以后我将成为名人.

命题 3　如果我成了名人,大家一定会高兴的.

这里命题 2 和命题 1 属于同一类型,只是命题 1 中很确切的"明年 12 月 21 日中午",在命题 2 中改成了模糊不清的"以后",命题 1 中很清楚的"在华沙",在命题 2 中变成了难以判定其是或否的"成为名人". 所以命题 2 与命题 1 相比不能仅仅用"真"与"假"这两个值去判断其真伪. 这里的命题 2 不只是论断具有不确定性,而且命题中出现的概念还具有模糊性. 至于命题 3 这种条件句,虽然从句型上看属于"若 A 则 B"的可判定其真伪的命题,但由于 A 与 B 包含了诸如"名人"、"大家"和"高兴"等许多模糊概念,所以实际上命题 3 是难以用"真"和"假"这两个明确值去判定其真伪的. 如果在命题 3 的基础上再加上"我成了比较有名的人",那么是否可以得出"大家比较高兴"的结论呢? 这些都不属于经典逻辑所讨论的范围. 但这类命题与推理在日常生活乃至工程技术领域里是大量存在的. 例如,已知

命题 4　如果扬声器里有严重的交流声,则多半是滤波电容器失效了.

那么如果"扬声器里有交流声(不很严重)",则修理工往往就会根据命题 4 推断"滤波电容器可能容量不足了". 再如,已知

命题 5　如果小轿车在行驶中方向盘明显抖动,则多半是轮胎没气了.

那么如果"方向盘有抖动(但不明显)",则驾驶员往往会考虑"是否轮胎充气不足",等等. 近年来兴起的模糊推理方法正是针对这类带有模糊性的推理而提出的. 通过用模糊集表示模糊概念,Zadeh 提出了解决上述问题的 CRI 方法,只是似乎与逻辑并无太大联系.

Zadeh 是美国加州大学伯克利分校的控制论专家,他于 1965 年提出了模糊集的概念[9],此后又于 1973 年提出了著名的 CRI 方法[28]. 模糊推理一经提出,立即引起了工程技术界的关注. 20 世纪 70 年代以后,各种模糊推理方法纷纷被提出(见文献[10]),并被应用于工业控制与家电产品的制造中,取得了很大的成功. 但是值得提出的是,模糊推理虽然在应用上是成功的,但在理论基础上却并非无懈可击,并没有归入严密的逻辑系统中. 以"模糊逻辑"或相近的名称命名的文章甚至书籍固然不少,但均未能为模糊推理奠定理论基础. 例如,不久前出版的以"Fuzzy Logic"命名的书[19]只收录了 48 篇不同领域里的文章,实在是与模糊逻辑相距甚远的有名无实的书籍. Pavelka 的系列文章[20~22]倒真是高水平的模糊逻辑的专论,只是并不与诸如 CRI 方法等模糊推理理论挂钩. 难怪 1993 年会爆发一场关于模糊逻辑的争论. 1993 年 7 月,加州大学圣迭戈分校的 Elken 在美国第 11 届人工智能年会上作了题为"模糊逻辑的似是而非的成功"的报告,引起了一场轩然大波. 此后虽有 15 位专家撰稿批驳 Elken 的观点,但 Elken 并未被完全说服,他又以"关于模

糊逻辑的似是而非的争论”作答. 1995 年,Watkins 又撰文说“双方都错了”(见文献[6,11 ~14,27]). 由此可见,模糊推理方法的理论基础问题的确是值得商榷的.

本书作者从 20 世纪 70 年代末开始从事模糊拓扑学与格上拓扑学的研究,培养了一批博士与硕士研究生. 在教学与科研过程中发现格上拓扑学的研究方法特别是其中关于序结构的若干基本思想似与上述各类模糊推理方法有某些相通之处. 近年来,随着作者对模糊推理问题逐渐增多的介入和认识,也受朋友们积极建议的鼓舞,于 1993 年开始招收“多值逻辑与模糊逻辑”方向的研究生. 作为教材的一部分,我们曾试用过文献[3 ~5],并系统讲授过 Mukaidono 关于多值逻辑的研究成果[57 ~62]以及 Pavelka 的题为“On Fuzzy Logic”的系列文章[20 ~22]. 关于文献[5],确实是一部很不错的专著,只是其中关于多值逻辑的理论部分仅限于讨论函数完备性问题,似乎面窄了一些. 文献[4]是由著名的多值逻辑学家 Epstein 撰写的,内容比较丰富,只是似乎侧重于多值逻辑的代数理论和逻辑电路的分析,并没有逻辑演算的内容. 而文献[3]则属于关于多值逻辑的早期理论,作为教材是远远不够的. 另外,作者于近年来在学习、讲授以及组织讨论班的过程中逐渐增多了对多值逻辑与模糊逻辑的了解,也撰写和发表了一些这方面的文章(见文献[51 ~55,6,8,27,30,39 ~44,71,72,74 ~76]). 既然一时找不到合适的教材,作者就萌发了自己编写一部讲义的想法. 那么内容如何选定呢? 经过一段讲课与讨论并听取了有关专家的意见,决定编写一部能包含以下内容的教材:

第一,较系统地介绍多值(命题)逻辑的语义理论.

第二,提出一种新的模糊命题演算的形式系统以求为模糊推理建立某种逻辑依据.

第三,用积分方法建立一种语义系统,为近似推理提供一种可能的框架.

第四,介绍 Gerla 关于抽象逻辑与 Pavelka 关于模糊逻辑的工作,为开展进一步的工作奠定基础.

作者采取了边讲、边讨论、边总结的办法. 在此期间还先后邀请了东京明治大学的向殿政男、大阪电气通信大学的水本雅晴、上海铁道大学的胡谋、南京航空航天大学的朱梧槚、英国剑桥大学的 Johnstone、清华大学的应明生、西安交通大学的张文修、捷克奥斯特洛瓦大学的 Novák 和莫斯科罗蒙诺索夫大学的 Perfilieva 等知名专家来陕西师范大学数学研究所讲学. 这些不仅开阔了我们的视野,也丰富了我们的教学内容. 向殿政男的关于多值逻辑范式的研究,水本雅晴的关于模糊推理的著名工作,Johnstone 的范畴逻辑,应明生在近似推理等方面的重要工作,张文修与梁怡在不确定性推理方面富于启发性的思想以及 Novák 继 Pavelka 之后的系列成果(见文献[32,57 ~70]等),在本书的形成中都直接或间接地起到很大的借鉴和促进作用. 由于多值逻辑涉及逻辑演算的语法问题、语义问题、代数问题、函数完备性问题、逻辑表达式的极小化问题以及在逻辑电路上的应用等多个方面,而模糊逻

辑至今尚未有一个成熟的系统,所以本书的撰写目的虽然是明确的,但似乎不太容易找到一个能恰当地涵盖其内容的书名. 最近国家自然科学基金设立了"格上拓扑学与非经典数理逻辑"的重点资助项目,考虑到作者也正是在从事这方面的研究,所以就将书名定为《非经典数理逻辑与近似推理》. 至此读者也已看到本书的内容的确与经典数理逻辑有很大的不同. 当然,"非经典数理逻辑"的名称是大了一些,但为了强调其特点,我们还是使用了"非经典"一词.

本书的内容安排如下:第 1 章介绍自由代数的概念并简要复习经典命题演算的内容,使得即使从未接触过数理逻辑的读者也可以顺利地阅读以后各章. 第 2 章介绍 Łukasiewicz 的三值系统 L_3、Bochvar 的三值系统 B_3、Kleene 的三值系统 K_3 和 Gödel 的三值系统 G_3. 然后将其一般化为 n 值系统. 最后介绍作者新近提出的 Σ-(α-重言式)理论. 第 3 章介绍作者提出的命题演算的形式系统 $\mathscr{L}^*$. 第 4 章介绍 $\mathscr{L}^*$ 中的语义理论并讨论模糊推理的逻辑基础. 第 5 章介绍作者提出的积分语义理论并为近似推理提供一种可能的框架. 第 6 章介绍抽象逻辑的基本思想. 第 7 章系统介绍 Pavelka 的模糊逻辑,并在许多地方作了详细的分析或评注,以使读者能比较容易地领会或许被复杂的推导掩盖的基本思想. 最后在第 8 章中作者通过将模糊推理抽象化和形式化的方法在经典逻辑学中建立了模糊推理的非模糊形式,从而在一定意义下为模糊推理建立了严格的逻辑基础. 请读者注意,本书的第 5、6、7、8 各章基本上是独立的,它们都只有很少的部分是依赖于前面的章节. 本书虽然是研究生教材的一部分,但相信理工科院校计算机专业等需要了解非经典逻辑与近似推理的高年级学生可以顺利地阅读本书. 本书虽然没有安排专门的习题,但为了加深读者的理解,作者在各章节中阶段性地提出了若干思考题供读者自行练习.

近几年参加听课或讨论的除了我自己的研究生侯健、朱安、何颖俞、刘练珍、周保魁、王向云、任芳、王三民、裴道武和吴洪博外,尚有西安公路交通大学的何文和任功全副教授,西安交通大学的博士研究生杨晓斌、郑亚林、程国盛,中国人民解放军空军第二飞行学院的朱文革,上海师范大学的陈仪香博士,聊城师范学院的孟晗副教授,西北工业大学的博士后李永明,新加坡南洋理工大学的赵东升博士,固原师专的辛晓东以及陕西师范大学数学系的教授杨忠强博士、樊太和博士、赵彬博士和李生刚博士等. 他们曾提出过许多好的意见和建议. 本书的部分内容曾在西南交通大学、上海师范大学、深圳大学、西安交通大学和西安电子科技大学作过报告. 作者还和张文修教授、吴望名教授、应明生教授以及徐扬教授等就逻辑问题进行过讨论,使作者获益匪浅. 我的研究生何颖俞和裴道武纠正了若干笔误,陕西师范大学出版社的朱娆和打印社的黄新玲细心地打印了全部书稿. 作者对以上提到的各单位与个人表示衷心的感谢.

最后,作者要特别感谢中国科学院科学出版基金和陕西师范大学学术出版基金为本书出版所提供的资助. 特别感谢四川大学刘应明院士、清华大学应明生教

授和北京师范大学李洪兴教授,他们都阅读了本书的部分书稿,对本书作了充分的肯定并热情推荐本书的出版.本书之所以这么快就能与读者见面是与以上各方面的大力支持分不开的.

本书的各部分内容都向研究生或青年教师讲授过,其中不少是作者新近完成的科研成果.各部分都经过多次讨论.尽管如此,限于作者的水平,不妥乃至谬误之处都在所难免,希望各位专家与读者不吝赐教.

王国俊

1999 年于陕西师范大学数学研究所

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

本章介绍阅读本书所需的预备知识. 熟悉代数学和经典命题逻辑的读者可以跳过本章,从第 2 章开始.

在 1.1 节中介绍关于泛代数方面的一些知识. 泛代数的内容十分丰富,而我们只需要其中关于自由代数的知识. 希望尽快接触多值逻辑内容的读者也可略去 1.1 节,而仅仅阅读它的最后一段,即关于自由代数的通俗解释部分.

在 1.2 节中介绍经典命题逻辑. 除了在介绍紧性时用到滤子及超滤的概念外,其余部分是自封的. 即使未接触过数理逻辑的读者也可以毫无困难地读完这一部分. 为了避免通常对完备性定理的繁冗的证明,我们给出了较易理解的基于范式以及可证等价概念的证明方法.

1.1　泛代数中的预备知识

1.1.1　泛代数

(1)泛代数的定义

定义 1.1.1　设 A 是非空集,则

i) A 上的 0 元运算是 A 中的一个元素.

ii) A 上的 1 元运算是 A 上的自映射 $f:A\to A$.

iii) A 上的 2 元运算是 A 上的 2 元函数 $f:A\times A\to A$.

iv) A 上的 n 元运算是 A 上的 n 元函数 $f:A^n\to A, n\geqslant 1$.

注 1.1.2　0 元运算也可以理解为映射 $f:A^0\to A$. 这里 A^0 表示仅含一个元素(比如$\varnothing$)之集,这时 f 被它的像,也即 A 中的一个元素所确定. 以上我们对“映射”与“函数”不加区别,究竟用哪一个词视习惯用法而定,如自映射不宜说成“自函数”,而 2 元映射一般多称为 2 元函数等,下同.

定义 1.1.3　设 T 是非空集,N 是非负整数之集. $ar:T\to N$ 是映射,则称 $\mathscr{T}=(T,ar)$ 为**型**. 有时也把型 $\mathscr{T}$ 简记为 T,并令 $T_n=\{t\in T\mid ar(t)=n\}$.

定义 1.1.4　设 T 是型. A 是非空集. 如果对每个 $t\in T$,有一 $ar(t)$ 元函数 $t_A:A^{ar(t)}\to A$,则称 A 为 ***T* 型泛代数**,或 ***T* 代数**. 当 $t\in T_n$ 时,t_A 叫 T 代数 A 上的 n 元运算. 对每个 0 元运算 t 以 t_A 记 A 中相应的元素.

(2) T 代数的例子

例 1.1.5　设 $T=\{0,-,+,\cdot\}$，$ar:T\to N$ 定义为 $ar(0)=0$，$ar(-)=1$，$ar(+)=2$，$ar(\cdot)=2$. 这时任一不带单位的环 R 都是一个 T－代数. $T_0=\{0\}$，$T_1=\{-\}$，$T_2=\{+,\cdot\}$. 0_R 是 R 的加法单位 0，$-_R:R\to R$ 是加法逆运算. $+_R$ 与 $\cdot_R$ 分别是 R 的加法运算和乘法运算.

例 1.1.6　设 $T=\{\top,\bot,\vee,\wedge\}$，$T_0=\{\top,\bot\}$，$T_2=\{\vee,\wedge\}$，则任一有界格 L 都是一个 T－代数. $\top_L$ 与 $\bot_L$ 分别是 L 的最大元 $\top$ 与最小元 $\bot$，$\vee_L$ 与 $\wedge_L$ 分别是 L 中的上、下确界运算.

(3) T 代数同态

定义 1.1.7　设 A 与 B 是具有同一型 T 的泛代数，$\varphi:A\to B$ 是映射，如果

i) 对每个 0 元运算 $t\in T_0$，$\varphi(t_A)=t_B$.

ii) 对每个 n 元运算 $t\in T_n(n\geqslant 1)$ 及 A 中任意 n 个元素 $a_1,\cdots,a_n$，

$$\varphi(t_A(a_1,\cdots,a_n))=t_B(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)),\tag{1.1.1}$$

则称 φ 为从 A 到 B 的 ***T*-同态**.

群同态、环同态、格同态等都是 T-代数同态的特例.

命题 1.1.8　设 A 与 B 是 T-代数，$\varphi:A\to B$ 是双射. 如果 φ 是 T-同态，则 $\varphi^{-1}:B\to A$ 也是 T-同态.

证　i) 设 $t\in T_0$，则由 $\varphi(t_A)=t_B$ 得 $\varphi^{-1}(t_B)=t_A$.

ii) 设 $t\in T_n(n\geqslant 1)$，$b_1,\cdots,b_n\in B$. 令 $a_i=\varphi^{-1}(b_i)(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $\varphi(a_i)=b_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 由 (1.1.1) 式得

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(t_B(b_1,\cdots,b_n))&=\varphi^{-1}(t_B(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)))\\&=t_A(a_1,\cdots,a_n)=t_A(\varphi^{-1}(b_1),\cdots,\varphi^{-1}(b_n)),\end{aligned}$$

所以 φ^{-1} 是 T-同态.

定义 1.1.9　设 A 与 B 是 T-代数. $\varphi:A\to B$ 是 T-同态. 如果 φ 是双射，则称 φ 为从 A 到 B 上的 ***T*-同构**. 这时由命题1.1.8知 $\varphi^{-1}:B\to A$ 是从 B 到 A 上的同构，故可称 A 与 B ***T*-同构**或 B 与 A ***T*-同构**. 记作 $A\overset{\varphi}{\cong}B$ 或 $B\overset{\varphi^{-1}}{\cong}A$.

(4) T 代数的子代数

定义 1.1.10　设 A 是 T-代数，B 是 A 的非空子集. 如果

i) 对每个 $t\in T_0$，$t_A\in B$.

ii) 对每个 $t\in T_n(n\geqslant 1)$，对任意 $b_1,\cdots,b_n\in B$，$t_A(b_1,\cdots,b_n)\in B$.

即 B 对 T 中每个 t 所对应的运算均封闭，则称 B 为 A 的**子代数**.

下述命题是显然的.

命题 1.1.11　设 A 是 T-代数，则

i) A 的一族子代数的交仍为 A 的子代数.

ii) 对 A 的任一非空子集 X,存在 A 的包含 X 的最小子代数,叫由 X 生成的 A 的子代数,记作 $\langle X\rangle_T$ 或 $\langle X\rangle$.

命题 1.1.12　设 A 与 B 是 T-代数,$\varphi:A\to B$ 是 T-同态,则 $\varphi(A)$ 是 B 的子代数.

证　i) 设 $t\in T_0$,则由 T-同态的定义知 $t_B=\varphi(t_A)\in\varphi(A)$.

ii) 设 $t\in T_n(n\geqslant 1)$,$b_1,\cdots,b_n\in\varphi(A)$,则有 $a_1,\cdots,a_n\in A$ 使 $\varphi(a_i)=b_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 由(1.1.1)式得

$$\begin{aligned} t_B(b_1,\cdots,b_n) &= t_B(\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_n)) \\ &= \varphi(t_A(a_1,\cdots,a_n)) \in \varphi(A), \end{aligned}$$

所以 $\varphi(A)$ 是 B 的子代数.

1.1.2　自由代数

(1) S 生成的自由代数

定义 1.1.13　设 S 是非空集,T 是型,F 是 T-代数,$\sigma:S\to F$ 是映射. 如果对任一 T-代数 A 以及任一映射 $\tau:S\to A$,存在唯一的 T-同态 $\varphi:F\to A$ 使 $\varphi\sigma=\tau$,即图 1.1 可换,则称 F 为由 S 生成的**自由 T-代数**.

注 1.1.14　i) 上述 σ 一定是单射. 事实上,任取含多于一个元素的 T-代数(请读者自证这种 T-代数一定有)A. 设 x_1 与 x_2 是 S 中的不同元素,作映射 $\tau:S\to A$ 使 $\tau(x_1)\neq\tau(x_2)$,则由 $\varphi\sigma=\tau$ 知 $\sigma(x_1)\neq\sigma(x_2)$,即 σ 是单射.

ii) 由 σ 是单射, 知 σ 可看成 S 到 F 中的嵌入. 如果把 S 与 $\sigma(S)$ 不加区别,则由 S 生成的自由代数 F 的特征在于:F 的子集 S 到任一 T-代数 A 的任一映射 τ 均可唯一地扩张为从 F 到 A 的 T-同态.

iii) 由 S 生成的自由 T-代数在同构意义下是唯一的. 事实上,设映射 $\sigma':S\to F'$ 也满足定义 1.1.13 的条件,则有图 1.2.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\tau"'] & & F \arrow[dl, "\varphi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

图 1.1

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma'"'] & & F \arrow[dl, shift left, "\varphi"] \\ & F' \arrow[ur, shift left, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

图 1.2

同态 $\varphi:F\to F'$使 $\varphi\sigma=\sigma'$且有同态 ψ 使 $\psi\sigma'=\sigma$. 那么 $\psi\varphi\sigma=\sigma$,这里 $\psi\varphi:F\to F$. 又 $\mathrm{id}_F\sigma=\sigma$,见图 1.3.

所以, 由唯一性条件(取定义中的 A 为 F)得 $\psi\varphi=\mathrm{id}_F$. 同理 $\varphi\psi=\mathrm{id}_{F'}$. 可见,$\varphi:F\to F'$与 $\psi:F'\to F$ 互为逆映射,从而 F 与 F'同构.

iv) 设 S' 与 S 等势,即存在双射 $\eta:S'\to S$,则 S' 与 S 生成相同的自由 T-代数. 事实上,设 $\sigma:S\to F$ 满足定义 1.1.13 的条件,则 $\sigma\eta:S'\to F$ 具有如下性质:设 $\tau:S'\to A$ 是任一映射,则 $\tau\eta^{-1}$ 是从 S 到 A 的映射,从而有唯一的同态 $\varphi:F\to A$ 使 $\varphi\sigma=\tau\eta^{-1}$ 或 $\varphi(\sigma\eta)=\tau$. 这正表明, F 是由 S' 生成的自由 T-代数. 可见, 重要的只是集 S 的势,映射 σ 并不重要. 特别是可以在一开始定义自由 T-代数时就用与 S 等势的集 $\sigma(S)$ 取代 S,这时就可把 σ 取作嵌入映射. 从这一意义上讲,自由 T-代数 F 就是由 F 的某非空子集 S 生成的,从 S 到任一 T-代数 A 的任何映射都可扩张为从 F 到 A 的 T-同态.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & F \arrow[dl, "\mathrm{id}_F"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

图 1.3

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\tau"'] & S \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tau\eta^{-1}"] & F \arrow[dl, "\varphi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

图 1.4

例 1.1.15　设型 $T=\{*\}$, $*$ 是二元运算, $S=\{a,b\}$,则 S 生成一个自由 T-代数 G. 略去运算符号 $*$ 不写,并把每两个元素的运算结果用括号(　)括起来,略去最外层的括号,则 G 由下述元素组成:

$$a,\quad b,\quad aa,\quad ab,\quad ba,\quad bb,\quad a(aa),\quad a(ab),\quad a(ba),$$
$$a(bb),\quad (aa)a,\quad (aa)b,\quad (ab)a,\quad (ab)b,\quad \cdots.$$

一般地,设 ω_1 与 ω_2 是 G 中元素,则 $\omega_1\omega_2$ 与 $\omega_2\omega_1$ 也是 G 中的元素. 例如, $a(ba)$ 与 $b(aa)$ 都属于上面列出的元素, $(a(ba))(b(aa))$ 与 $(b(aa))(a(ba))$ 就也都是 G 的元素. 可以证明 G 是由 $\{a,b\}$ 生成的自由 T-代数.

事实上,设 H 是任一 T-代数, $\tau:\{a,b\}\to H$ 是任一映射. 设 $\tau(a)=\alpha,\tau(b)=\beta$. 现在把 τ 扩张到 G 上. 设 $\omega\in G$,则 ω 由 a,b 以及括号组成. 分别以 α 与 β 取代 ω 中的 a 与 b 并保持括号不变,则得一 H 中的元素,记为 $\varphi(\omega)$. 如此则得一映射 $\varphi:G\to H$. 由 φ 的对应方法直接看出 φ 是 T-同态,且 φ 是 τ 的扩张. 设 T-同态 $\psi:G\to H$ 也是 τ 的扩张,则 $\psi(a)=\alpha,\psi(b)=\beta$,且由 ψ 为同态知

$$\psi(ab)=\psi(a)\psi(b)=\alpha\beta,$$
$$\psi(a(ba))=\psi(a)(\psi(b)\psi(a))=\alpha(\beta\alpha)$$

等,即对每个 $\omega\in G$,把 ω 中的 a 与 b 分别用 α 与 β 去代换并保持括号不变即得 $\psi(\omega)$. 可见, ψ 就是 φ. 这表明, τ 可唯一地扩张为 T-同态 $\varphi:G\to H$. 所以 G 是由 $\{a,b\}$ 生成的自由 T-代数.

当 $*$ 具有结合性时, $a(ba)$ 与 $(ab)a$ 表示同一个元素,这时可将括号略去而用 aba 表示这个元素. 这时的 G 叫由 $\{a,b\}$ 生成的**自由半群**.

对一般的非空集 S 及一般的型 T,由 S 生成的自由 T-代数是存在的,其证明可

见文献[1]或其他泛代数教程.

(2)自由代数的通俗解释

上面的例 1.1.15 中由 $S=\{a,b\}$ 生成的自由 T-代数也可这样描述:

i) S 中的元素属于 G.

ii) 如果 ω_1 与 ω_2 属于 G,则 $\omega_1\omega_2$ 也属于 G.

iii) G 中不再含其他的元素.

这种描述是简单而清楚的,特别是在逻辑学中经常采用这种描述.

例 1.1.16 设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$,型 $T=\{\neg,\rightarrow\}$,这里$\neg$与$\rightarrow$分别是一元和二元运算(为方便计,我们经常把 t 与 t_A 不加区别,即把型 T 看成是一族运算的集),则由 S 生成的$\{\neg,\rightarrow\}$型自由代数 $F(S)$ 由以下元素组成:

i) S 中的元素都属于 $F(S)$.

ii) 如果 A 与 B 都属于 $F(S)$,则$\neg A$ 和 $A\rightarrow B$ 也属于 $F(S)$.

iii) $F(S)$ 中不再含有其他元素.

可以像例 1.1.15 一样证明,这样定义的 $F(S)$ 的确是由 S 生成的$\{\neg,\rightarrow\}$型自由代数. 只是证明过程很麻烦.

1.2 经典命题演算理论

1.2.1 自由代数——用符号表示命题

命题就是句子,它含有主语和谓语. 如在句子"7 是素数"中,"7"是主语,"是素数"是谓语. 但命题演算只关心整体句子(包括复合句子)之间的关系,而对每个句子不再分解为主语与谓语去考虑. 例如,句子"并非我既饿又渴"与句子"我不饿或者我不渴"的意思是一样的. 如果用 A 表示"我饿",B 表示"我渴",则前一个句子可写为$\neg(A\wedge B)$,后一个句子可写为$\neg A\vee\neg B$. 这里用$\neg$表示否定,$\wedge$与$\vee$分别表示合取(同时成立)与析取(至少一个成立). 注意:A 句中"我"是主语,"饿"是谓语. 但在上面考虑两个复合句之间的关系时并不对 A 作分解,这正是命题演算与谓词演算的不同之处. 再如,句子"并非加利福尼亚州有地震又有水灾"与句子"加利福尼亚州没有地震或加利福尼亚州没有水灾"的意思是一样的. 如果用 A 表示"加利福尼亚州有地震",B 表示"加利福尼亚州有水灾",则前一个句子可写为$\neg(A\wedge B)$,后一个句子可写为$\neg A\vee\neg B$. 我们看到,尽管饿、渴与地震、水灾是完全不同的概念,但由它们组成的句子之间可以有完全相同的关系,即$\neg(A\wedge B)$与$\neg A\vee\neg B$ 总是逻辑等价的,而不管 A 与 B 代表着什么样的具体命题. 所以命题演算的任务是:在把命题抽象化为符号的基础上,研究这些抽象符号之间的关系.

定义 1.2.1 设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 是可数集,$\neg$与$\rightarrow$分别是一元运算与二元运

算,由 S 生成的$\{\neg ,\to\}$型自由代数记作 $F(S)$. $F(S)$ 中的元素叫**命题**、**句子或公式**,S 中的元素叫**原子命题**或**原子公式**.

如 1.1 节所述,$F(S)$ 也可按例 1.1.16 去描述. 以上$\neg$ 与$\to$只是形式上的运算,并不含有任何具体的意义.

1.2.2　语构理论——形式演绎体系

(1)公理

如果把$\neg$ 理解为否定,把$\to$理解为蕴涵(以后在应用时正是这样去理解的),则$\neg(\neg A)$与 A 应当一样,$A\to A$ 应当永远成立,等等. 按说我们应当把 $F(S)$ 中显然成立的公式都肯定下来,但应当肯定的公式太多了,如$(A\to B)\to(A\to B)$、$\neg(\neg(A\to B))\to(A\to B)$等都应肯定. 经过分析,人们挑选出几种公式作为公理而肯定下来,再定一条推理规则,然后就可以由公理出发运用推理规则把全部应当肯定的公式都作为定理而推演出来.

定义 1.2.2　$F(S)$ 中具有以下形式的公式叫**公理**:

(L1)$A\to(B\to A)$;

(L2)$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$;

(L3)$(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$.

注意:公理不是三条,而是有无穷多条. 以(L3)为例,它说只要形如(L3)的公式都是公理,如

$$(\neg p_1\to\neg p_2)\to(p_2\to p_1)$$
$$(\neg(\neg p_3)\to\neg(\neg p_4))\to(\neg p_4\to\neg p_3)$$

等都是公理. 为了更加明确,许多教材中都用花写的 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 等描述公理. 本书为简便起见就不用花体字了.

(2)推理规则

只有上述三种公理是不够的,由它们连 $A\to A$ 都推不出来,所以必须再加上如下的推理规则才行.

定义 1.2.3(分离规则)　由公式 $A\to B$ 与 A 可推得 B.

分离规则也叫 **Modus Ponens** 或简称 **MP**.

(3)证明

定义 1.2.4　一个**证明**是一个公式序列

$$A_1,\quad A_2,\quad \cdots,\quad A_n,$$

这里对每个 $i\leqslant n$,A_i 或者是公理,或者有 $j<i,k<i$,使 A_i 是由 A_j 与 A_k 运用 MP 而得到的公式. 这时 A_n 叫**定理**,上述证明叫 **$\boldsymbol{A_n}$ 的证明**. A_n 是定理可记作 $\vdash \boldsymbol{A_n}$.

显然,一个证明序列的前若干项仍组成一个证明序列.

例 1.2.5　试证:

i) $\vdash A\to A$;

ii) $\vdash \neg A\to(A\to B)$.

证 i) 以下 1°—5°是 $A\to A$ 的一个证明.

1°	$A\to((B\to A)\to A)$	(L1)
2°	$(A\to((B\to A)\to A))\to((A\to(B\to A))\to(A\to A))$	(L2)
3°	$(A\to(B\to A))\to(A\to A)$	1°,2°,MP
4°	$A\to(B\to A)$	(L1)
5°	$A\to A$	3°,4°,MP

ii)

1°	$\neg A\to(\neg B\to\neg A)$	(L1)
2°	$(\neg B\to\neg A)\to(A\to B)$	(L3)
3°	$((\neg B\to\neg A)\to(A\to B))\to(\neg A\to((\neg B\to\neg A)\to(A\to B)))$	(L1)
4°	$\neg A\to((\neg B\to\neg A)\to(A\to B))$	2°,3°,MP
5°	$(\neg A\to((\neg B\to\neg A)\to(A\to B)))\to$ $((\neg A\to(\neg B\to\neg A))\to(\neg A\to(A\to B)))$	(L2)
6°	$(\neg A\to(\neg B\to\neg A))\to(\neg A\to(A\to B))$	4°,5°,MP
7°	$\neg A\to(A\to B)$	1°,6°,MP

定义 1.2.6 设 Γ 是一族公式,即 $\Gamma\subset F(S)$,设 $A\in F(S)$. **从 Γ 到 A 的一个证明**是一个公式序列

$$A_1,\quad A_2,\quad \cdots,\quad A_n,$$

这里 $A_n=A$,且对每个 $i\leqslant n$,A_i 是公理或 $A_i\in\Gamma$ 或存在 $j<i,k<i$,使 A_i 是由 A_j 与 A_k 运用 MP 而得到的公式. 存在从 Γ 到 A 的证明记作 $\Gamma\vdash \boldsymbol{A}$.

当 Γ 是空集时,$\Gamma\vdash A$ 表示 A 是定理,即 $\vdash A$.

显然, 一个 Γ 证明序列的前若干项也构成一个 Γ 证明序列.

定理 1.2.7 (演绎定理) 设 $\Gamma\subset F(S)$,$A\in F(S)$,$B\in F(S)$. 如果 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$,则 $\Gamma\vdash A\to B$.

证 由于 $\Gamma\cup\{A\}\vdash B$,故存在从 $\Gamma\cup\{A\}$ 到 B 的证明序列. 按此序列的长度可归纳地证明 $\Gamma\vdash A\to B$ 如下:

i) 若序列长度为 1,则 B 为公理,或 $B\in\Gamma$ 或 $B=A$,则易证 $\Gamma\vdash A\to B$. 证明留给读者.

ii) 设序列长度小于 n 时定理成立,今从 $\Gamma\cup\{A\}$ 到 B 的证明长度为 n. 如果 B 是公理,或 $B\in\Gamma$,或 $B=A$,则容易证明 $\Gamma\vdash A\to B$. 所以, 不妨设 B 是由前面的两项 C 与 $C\to B$ 运用 MP 而得到的公式:

$$\cdots,\quad C,\quad \cdots,\quad C\to B,\quad B.$$

由于 C 和 $C\to B$ 都是从 $\Gamma\cup\{A\}$ 证得的公式且证明长度均小于 n,那么由归纳假

设知

$$\Gamma \vdash A \to C, \tag{1.2.1}$$

$$\Gamma \vdash A \to (C \to B). \tag{1.2.2}$$

由(1.2.2),(L2)及 MP 得

$$\Gamma \vdash (A \to C) \to (A \to B). \tag{1.2.3}$$

由(1.2.1),(1.2.3)及 MP 即得 $\Gamma \vdash A \to B$.

以上为了简便起见,我们并没有写出完整的证明序列,读者不难补齐它们,以下我们将继续这样做.

定理 1.2.8 (三段论规则)　$\{A\to B, B\to C\}\vdash A\to C$.

证　用两次 MP 易证 $\{A\to B, B\to C\}\cup\{A\}\vdash C$. 所以由演绎定理即得三段论规则.

三段论规则即 **Hypothetical Syllogism**,简称 **HS**.

注 1.2.9　HS 是由演绎定理推得的,它说只要以 $A\to B$ 与 $B\to C$ 为前提就可推得 $A\to C$. 不管 $A\to B$ 与 $B\to C$ 是否为定理. 较弱形式的三段论规则是:若 $A\to B$ 与 $B\to C$ 都是定理,则 $A\to C$ 也是定理. 这一事实可以不用演绎定理而证出. 证明留给读者.

例 1.2.10　试证:

i) $\vdash (\neg A\to A)\to A$;

ii) $\vdash \neg\neg A\to A$;

iii) $\vdash A\to\neg\neg A$;

iv) $\vdash A\vee B\to B\vee A$,这里 $A\vee B$ 是 $\neg A\to B$ 的简写;

v) $\vdash A\to A\vee B$;

vi) $\vdash (A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$;

vii) 若 $\vdash A$,则 $\vdash B\to A\wedge B$,这里 $A\wedge B$ 是 $\neg(\neg A\vee\neg B)$ 的简写.

证　i) 由演绎定理,只需证 $\{\neg A\to A\}\vdash A$. 证明如下:

1°	$\neg A\to A$	假设
2°	$\neg A\to(A\to\neg(\neg A\to A))$	例 1.2.5　ii)
3°	$(\neg A\to A)\to(\neg A\to\neg(\neg A\to A))$	2°,(L2),MP
4°	$\neg A\to\neg(\neg A\to A)$	1°,3°,MP
5°	$(\neg A\to A)\to A$	4°,(L3),MP
6°	A	1°,5°,MP

ii)

1°	$\neg\neg A\to(\neg A\to A)$	例 1.2.5　ii)
2°	$(\neg A\to A)\to A$	本例 i)
3°	$\neg\neg A\to A$	1°,2°,HS

iii)

1°	$\neg\neg\neg A\to\neg A$	本例 ii)

	2° $(\neg\neg\neg A\to\neg A)\to(A\to\neg\neg A)$	(L3)
	3° $A\to\neg\neg A$	1°,2°,MP
iv) 只需证$\{\neg A\to B\}\vdash\neg B\to A$		
	1° $\neg A\to B$	假设
	2° $B\to\neg\neg B$	本例 iii)
	3° $\neg A\to\neg\neg B$	1°,2°,HS
	4° $(\neg A\to\neg\neg B)\to(\neg B\to A)$	(L3)
	5° $\neg B\to A$	3°,4°,MP
v)	1° $A\to(\neg B\to A)$	(L1)
	2° $(\neg B\to A)\to(\neg A\to B)$	本例 iv)
	3° $A\to(\neg A\to B)$	1°,2°,HS
	4° $A\to A\vee B$	3°的简写
vi) 只需证$\{A\to(B\to C)\}\vdash B\to(A\to C)$.		
	1° $A\to(B\to C)$	假设
	2° $(A\to B)\to(A\to C)$	1°,(L2),MP
	3° $B\to(A\to B)$	(L1)
	4° $B\to(A\to C)$	3°,2°,HS
vii)	1° $(\neg\neg A\to\neg B)\to(\neg\neg A\to\neg B)$	例 1.2.5 i)
	2° $\neg\neg A\to((\neg\neg A\to\neg B)\to\neg B)$	1°,本例 vi),MP
	3° A	A 是定理
	4° $A\to\neg\neg A$	本例 iii)
	5° $\neg\neg A$	3°,4°,MP
	6° $(\neg\neg A\to\neg B)\to\neg B$	5°,2°,MP
	7° $(\neg A\vee\neg B)\to\neg B$	6°的简写
	8° $\neg\neg(\neg A\vee\neg B)\to(\neg A\vee\neg B)$	本例 ii)
	9° $\neg\neg(\neg A\vee\neg B)\to\neg B$	8°,7°,HS
	10° $B\to\neg(\neg A\vee\neg B)$	9°,(L3),MP
	11° $B\to A\wedge B$	10°的简写

(4) 可证等价

定义 1.2.11 设 $A,B\in F(S)$,如果 $\vdash A\to B$ 且 $\vdash B\to A$,则称公式 A 与 B 是**可证等价**的.

由 HS 知可证等价是 $F(S)$ 上的等价关系.

由例 1.2.10 看出,A 与$\neg\neg A$ 是可证等价的,$A\vee B$ 与 $B\vee A$ 是可证等价的,下面再举一些可证等价公式的例子.

例 1.2.12 试证下列每对公式是可证等价的:

i) $A\vee(B\vee C)$与$(A\vee B)\vee C$;

ii) $A\to\neg B$与$B\to\neg A$;

iii) 当$\vdash A$时,$A\wedge B$与B;

iv) $A\wedge(B\vee C)$与$(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$.

证　i) 由例1.2.10易证$A\vee(B\vee C)$与$A\vee(C\vee B)$可证等价,$(A\vee B)\vee C$与$C\vee(A\vee B)$可证等价. 又$A\vee(C\vee B)$是$\neg A\to(\neg C\to B)$的简写,$C\vee(A\vee B)$是$\neg C\to(\neg A\to B)$的简写. 由例1.2.10　vi) 知$\neg A\to(\neg C\to B)$与$\neg C\to(\neg A\to B)$是可证等价的.

ii) 先证$\{A\to\neg B\}\vdash B\to\neg A$

1°	$A\to\neg B$	假设
2°	$\neg\neg A\to A$	例1.2.10　ii)
3°	$\neg\neg A\to\neg B$	1°,2°,HS
4°	$B\to\neg A$	3°,(L3),MP

所以由演绎定理得$\vdash(A\to\neg B)\to(B\to\neg A)$. 同理可证$\vdash(B\to\neg A)\to(A\to\neg B)$. 所以$A\to\neg B$与$B\to\neg A$可证等价.

iii) 当$\vdash A$时,由例1.2.10 vii),只需证$\vdash A\wedge B\to B$,即$\vdash\neg(\neg A\vee\neg B)\to B$. 由例1.2.10 iv) 只需证$\vdash\neg B\to(\neg A\vee\neg B)$. 而由例1.2.10 iv) 与v)知这是正确的.

iv) 证明留给读者作为练习.

(5) 范式

由以上讨论知$A\vee B$是$\neg A\to B$的简写,由此易证$A\to B$与$\neg A\vee B$可证等价(即与$\neg\neg A\to B$可证等价). 可见, 运算→可用¬与∨来表示. 那么$F(S)$中的每个公式都可用¬与∨来连接. 如果继续采用简化符号∧,用$A\wedge B$来作为$\neg(\neg A\vee\neg B)$的简写,则$F(S)$中的每个公式都可通过$\{p_1,p_2,\cdots\}$中的原子公式用连接词¬,∨与∧连接而得. ¬叫**否定**连接词,∨叫**析取**连接词,∧叫**合取**连接词. 以下采用文献[1]中的范式定义.

定义1.2.13　由有限多个原子公式或其否定式通过合取(析取)连接词连接而得到的公式叫**简单合取式**(**简单析取式**). 有限多个简单合取式(简单析取式)通过析取(合取)连接词连接而得的公式叫**析取范式**(**合取范式**).

易证A,$A\vee A$与$A\wedge A$都是可证等价的. 所以, 由∨和∧都是交换的与结合的(即$A\vee B$与$B\vee A$可证等价,$A\wedge B$与$B\wedge A$可证等价)知可以假定简单合取式(简单析取式)中不含重复的原子公式或重复的原子公式的否定式. 例如

$$p_1,\quad p_1\wedge p_2\wedge\neg p_2,\quad p_1\wedge p_1\wedge\neg p_3\wedge\neg p_3$$

都是简单合取式,而第三式与$p_1\wedge\neg p_3$可证等价.

引理1.2.14　i) 简单合(析)取式的否定式可证等价于一简单析(合)取式;